直线、平面平行与垂直位置关系探究①

张 艳

（福建省福州第八中学，福建 福州 350004）

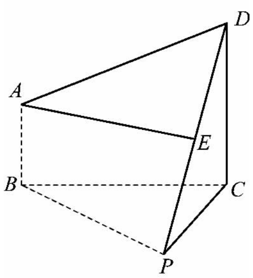
摘 要：新课程关注学生的学习过程、数学思想和方法的掌握及情感、态度、价值观的形成，本节课借助电子白板的多元交互和即时生成的优点，在一系列的探究活动中让学生理解、掌握、应用知识，并提高综合分析问题的能力，交流与合作的能力，有效提高了数学课堂的有效性。

关键词：电子白板；交互；探究；有效性

新课程注重学生的主体作用，重视学生学的方法，引导学生掌握和运用探究式学习方法。在教学过程中培养学生的独立性、自主性，运用已有知识分析推理问题，引导学生讨论、交流、反思，在一系列探究活动中既能理解、掌握和应用知识又能提高学生综合分析问题的能力，交流与合作的能力，特别是培养了创新精神和实践能力。在本学期，笔者开设了一节立体几何关于《直线、平面平行与垂直位置关系探究》的教学公开课。

首先，创设问题情境：

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，三角形 PBC 为正三角形，$AB\perp$ 平面 PBC，且 $AB\parallel CD$，$AB=\frac{1}{2}CD$，E 为 PD 的中点。



求证：(1) $AE\parallel$ 平面 PBC；(2) $AE\perp$ 平面 PDC。

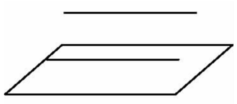
（利用电子白板和几何画版引入该问题情境，直观形象地展示空间几何体的结构特征。同学们很快进入状态，积极思考。让学生独立思考五分钟后，分析已知条件，给出思路。）

师：从已知条件中得知它是一个四棱锥，可为什么它的底面却是一个三角形呢？

生：它是一个倒放着的四棱锥。

师：很好！（适时展示模型）

本题设置了两个问题，第一是证明 $AE\parallel$ 平面 PBC，也就是要证明线面平行。根据大家前面所学的知识，要证明线面平行，我们有哪些途径呢？



生：线线平行。

生：还有面面平行。

师：对。那如果通过线线平行来证，它的关键是什么呢？

生1：只要证明 AE 与平面 PBC 内有一条直线平行即可。

师：你的依据是什么？

生1：根据线面平行的判定定理：平面外一条直线与此平面内一条直线平行，则该直线与此平面平行。

师：非常好。这样，我们就把证明线面平行的问题转化成线线平行的问题来解决。那我们该如何找到这条直线呢？

生1：在平面 DPC 内过点 E 作 $EF\parallel DC$ 交 PC 于点 F，连接 BF，BF 就是我要找的那条直线。

（教师结合学生的回答，利用电子白板的画图功能马上画出该辅助线，在与学生的交流中逐步呈现出学生的思维过程。）

师：这位同学在“体内”添加了一条辅助线，其他同学还有其他的想法吗？

生2：老师，我的方法和他不同，我在“体外”添加辅助线。

师：好，你说。

生2：延长 DA、CB 交于点 F，连接 PF。因为 A，E 分别为 DF 和 DP 的中点，所以 $AE\parallel FP$。

师：很好，这是你的思路，其他同学还有和他们不同的想法吗？

生2：还可以通过面面平行来证。

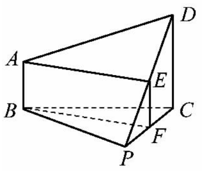
师：好，你来说说。

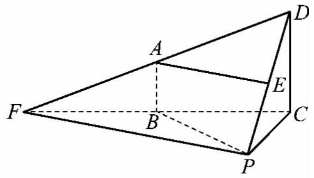
生2：我根据若两平面平行，则其中一平面内任一条直线都平行于另一平面。我只要在平面 $ABCD$ 内过 A 作 $AG\parallel BC$ 交 DC 于 G 点，连接 EG。构造出一平面 AGE 与已知平面 PBC 平行。

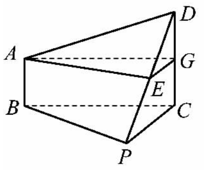
师：不错。这也是一个好办法。我们通过集思广益，找到了三种解决的途径，分别如下图。

（进而总结归纳出现有证明线面平行的几种方法——结合板书）

① 基金项目：本文系福建省教育科学“十二五”规划2015年度科研基地专项立项课题“Notebook改变数学教学策略的实践与研究”（项目编号：FJKYJD15－04）阶段性研究成果。





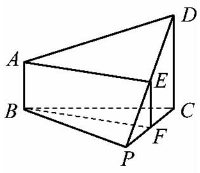


该过程是学生的探索过程，老师循循善诱，以问题串启发诱导为基础，是引导学生驶向成功彼岸的船。在这里，学生通过网络环境，讨论、交流、了解新知识，发现新方法；同时，教师则由施教者转为学生学习活动的组织者、协调者或参与者，帮助他们揭示获取数学知识的思维过程，主动建构自己的知识体系。

对于第二小题同样可以启发学生：要证直线 AE 垂直平面 PDC，只要证明直线 AE 与平面 PDC 内两条相交直线垂直即可。这是考查学生对线面垂直的判定定理是否掌握并会灵活应用。证明的过程可由学生独立完成后展示其作品，教师指导完善。

证明：方法一：

(1) 在平面 DPC 内过点 E 作 $EF/\!/DC$ 交 PC 于点 F，连接 BF



$\because E$ 为 PD 中点 $\therefore EF=\frac{1}{2}DC$

$\because AB/\!/DC$ 且 $AB=\frac{1}{2}DC$

$\therefore AB/\!/EF$ 且 $AB=EF$

$\therefore$ 四边形 $ABFE$ 为平行四边形

$\therefore AE/\!/BF$

$\because AB\not\subset$ 平面 PBC 且 $BF\subset$ 平面 PBC

$\therefore AE/\!/$ 平面 PBC

(2) $\because AB\perp$ 平面 PBC $AB/\!/DC$

$\therefore DC\perp$ 平面 PBC

$\because BF\subset$ 平面 PBC $\therefore BF\perp DC$……①

又 $\because \triangle PBC$ 为正三角形 F 为 PC 中点 $\therefore BF\perp PC$…②

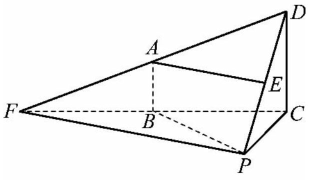
由①②及 $DC\cap PC=C$ 得 $BF\perp$ 平面 PDC

$\because$ 四边形 $BFEA$ 为平行四边形

$\therefore BF/\!/AE$ $\therefore AE\perp$ 平面 PDC

方法二：

(1) 延长 DA、DC 交于点 F，连接 PF



$\because AB/\!/DC$ 且 $AB=\frac{1}{2}DC$

$\therefore AB$ 为三角形 FDC 的中位线，A 为 FD 的中点

又 $\because E$ 为 DP 的中点

$\therefore AE/\!/FP$

$\because AE\not\subset$ 平面 PBC 且 $FP\subset$ 平面 PBC

$\therefore AE/\!/$ 平面 PBC

(2) $\because AB\perp$ 平面 PBC $AB/\!/DC$

$\therefore DC\perp$ 平面 PBC

$\because PF\subset$ 平面 PBC $\therefore FP\perp DC$

$\because FP/\!/AE$ $\therefore AE\perp DC$……①

又 $\because$ 在 $\triangle PFC$ 中 $BP=BC=BF=PC$

$\therefore \angle PBC=60^\circ$ $\angle BPF=\frac{1}{2}\times 60^\circ=30^\circ$

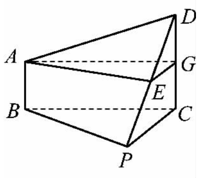
$\therefore FP\perp PC$

$\because FP/\!/AE$ $\therefore AE\perp PC$……②

由①②及 $DC\cap PC=C$ 得 $AE\perp$ 平面 PDC

方法三：

在平面 $ABCD$ 内过 A 作 $AG/\!/BC$ 交 DC 于 G 点，连接 EG



$\because AB/\!/DC$ 且 $AB=\frac{1}{2}DC$

$\therefore GC=\frac{1}{2}DC$，即 G 为 DC 的中点

又 $\because E$ 为 DP 的中点 $\therefore EG/\!/PC$

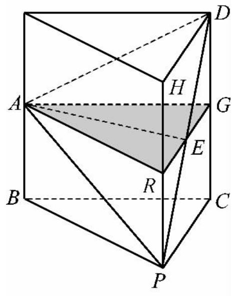
且 $AG\cap GE=E$，$BC\cap CP=C$

$\therefore$ 平面 $AGE/\!/$ 平面 BCP

$\because AE\subset$ 平面 AGE $\therefore AE/\!/$ 平面 PBC

最后，可以对本题略有些提高，启发学生可否将此四棱锥补成一个三棱柱呢？

师：若将两个同样的四棱锥拼接而成一个新的几何体，你有何发现？



思考一会，两三个男生突然喊出：它变成一个三棱柱。

（在电子白板上克隆一个一样的四棱锥并翻转，供学生观察）

师：平面 AGE 和新三棱柱是何关系呢？

生：平面 AGE 就是这个新三棱柱的中截面。

本例题力图给学生提供思考、操作、交流的空间，让主体主动构建自己的认知结构，充分体现了学生的主体地位和教师的主导作用。希望学生在自主探索和合作交流的过程中，充分感受到成功的情感体验，领悟到转化的数学思想在解决问题中所起到的重要作用。同时又培养学生的空间想象能力、逻辑思维能力和乐于探索，大胆创新的科学精神。课后，利用电子白板的笔记保存分享和微课录制功能，把本道题的详尽讲解分析过程推送给每个学生，便于他们课后对知识的复习和巩固。

借助电子白板的多元交互和即时生成的优点，智慧校园环境下的小组合作探究学习，改革了传统的教学方式，实践教法创新、学法创新。教师积极采用深受学生喜爱的教学方式，在注重基本知识和基本技能的教学的同时，关注学生的学习过程、数学思想和方法的掌握及学生们的情感、态度、价值观的形成；在数学教学过程重视学生数学能力的培养；积极开展信息技术与课程教学的整合研究。应用网络环境下自主学习、合作探究的新型教学模式，一改传统教学的满堂灌，使学生变被动为主动，课堂上生生互动、师生互动的生动场面，为学生创造了良好的学习环境，在理解掌握知识要点的同时，极大地激发了学生的学习兴趣和能力，提高了教学的质量，给数学课堂带来了勃勃生机。