教学设计不仅需要『高大上』，更需要『接地气』

——以《变化率与导数》为例

福建福州第八中学　揭连英

好的教学设计是教学成功的基础，是高效课堂的前提。而高效数学课堂有几大特色：一要注重帮助学生构建好的认知结构，即认知结构搭建的合理性，所以设计要贴近学生实际，也就是现在通俗的说法要接地气。二要注重高认知水平的数学教学任务，即教学内容的深刻性，所以设计要高端上档次。三要注重数学思维的培养，要注重预设与生成，所以教学设计要大气，要放手让学生去研究。现以人教 A 版数学选修 2-2 第一章第一节的内容《变化率与导数》（具体内容包括变化率问题和导数的概念）为例，主要谈谈教学设计中的“接地气”问题。

一、具体教学过程

（一）情境引入接地气

同学们，前几天气温徒增由最高温 7° 两天之内飙升到 23°，今天气温骤变，由昨天的最高温 23°降到 10°。“气温徒增”和“气温骤变”有什么数学意义呢？能否用温差的大小来刻画气温变化的快慢？

【设计意图】以气温变化这种生活现象的数学解释为切入角度，不仅可以激发学生学习本节课的兴趣，还能让学生感到数学是有用的。

活动预设：学生会回答气温变化的快慢不仅与温差有关还与经历的时间长短有关。

（二）概念教学接地气

1.年平均增长率问题：甲 2009 年年收入 2.3 万元，2013 年年收入 4.5 万元；乙 2011 年年收入 3.3 万元，2013 年年收入 5.5 万元。

问题 1：从 2009 年到 2013 年甲的收入变化了多少？从 2011 年到 2013 年乙的收入变化了多少？

问题 2：怎样才能刻画年收入变化的快慢？

【设计意图】年平均增长率是学生非常熟悉的知识，以此引入能避免因背景复杂而引起的干扰，从而让学生体会到增长率问题就是函数值变化量与自变量增量的比值，为后面的平均变化率概念引入做铺垫。

活动预设：学生容易得到甲乙都增加了 2.2 万元，但经历的时间不一样。问题 2 学生知道用年平均增长率刻画。并且易得到年收入增加量与时间的比值才能刻画出年收入变化的快慢。

甲年平均增长率：$\frac{4.5-2.3}{2013-2009}$；乙年平均增长率：$\frac{5.5-3.3}{2013-2011}$ ……（1）

2.高台跳水问题：人们发现，在高台跳水运动中，运动员相对于水面的高度 h（单位：m）与起跳后的时间 t（单位：s）存在如下函数关系：$h(t)=-4.9t^2+6.5t+10$。

问题 1：如果我们想了解运动员在某段时间内运动的快慢，可以用什么刻画？

【设计意图】贴近学生生活实际的高台跳水运动，背景简单，以此引入可以为归纳函数的“平均变化率”概念提供实际背景。

活动预设：学生根据物理学的知识，会用平均速度描述其运动状态。

问题 2：求在 $0\leqslant t\leqslant 0.5$，$1\leqslant t\leqslant 2$，这几段时间里，平均速度分别是多少？

【设计意图】让学生直观感知用数学概念可以刻画运动变化的快慢，由此体会到平均速度可以描述运动员在某段时间内运动的快慢，为建立函数的平均变化率打下基础。

活动预设：学生计算得到在 $0\leqslant t\leqslant 0.5$ 这段时间里，$\bar{v}=\frac{h(0.5)-h(0)}{0.5-0}=4.05\,(\mathrm{m/s})$；

在 $1\leqslant t\leqslant 2$ 这段时间里，$\bar{v}=\frac{h(2)-h(1)}{2-1}=-8.2\,(\mathrm{m/s})$ ……（2）

问题 3：上述两个问题的答案在结构上有什么相同之处？可以一般化吗？

【设计意图】让学生通过对比，在教师的引导下得出平均变化率的概念。

活动预设：学生通过观察（1）、（2）中四个式子，很容易发现结构是一样的。由特殊到一般化过程则通过教师引导，使学生逐步归纳出问题的共性，从而抽象出函数的平均变化率的概念。

平均变化率定义：上述两个问题中函数关系用 $y=f(x)$ 表示，那么平均变化率可以用式子：$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ 表示，称 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ 为函数 $y=f(x)$ 从 x_1 到 x_2 的平均变化率。习惯上用 Δx 表示 x_2-x_1，即 $\Delta x=x_2-x_1$，这里 Δx 看作是相对于 x_1 的一个“增量”，也可用 $x_1+\Delta x$ 代替 x_2。类似地，用 Δy 表示 $f(x_2)-f(x_1)$，则 $\Delta y=f(x_2)-f(x_1)$。则平均变化率也可以表示为 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$。

平均变化率就是一个变量相对于另一个变量的变化的快慢情况。所以用函数的增量与自变量的增量的比值来刻画。所以函数平均变化率与自变量变化的区间有关，与 $f(x_1)$，$f(x_2)$ 的先后顺序无关。

教师通俗易懂的解释加上前面两个贴近学生生活的问题的铺垫，学生很容易理解平均变化率为什么要用比值来刻画。不仅举的例子接地气，就连教师的语言也接地气。

问题 4：看到这个式子 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$，你想到什么？

【设计意图】希望学生能从式子的结构出发，得到平均变化率的几何意义。

活动预设：学生易发现 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ 表示 $y=f(x)$ 函数图象上 $(x_1,f(x_1))$，$(x_2,f(x_2))$ 这两点的斜率。（图略）

问题 5：由高台跳水问题通过计算，在 $0\leqslant t\leqslant \frac{65}{49}$ 这段时间里，$\bar{v}=\frac{h\left(\frac{65}{49}\right)-h(0)}{\frac{65}{49}-0}=0\,(\mathrm{m/s})$，并不能说运动员这段时间内是静止的，可见平均速度不能很好的刻画运动员的运动状态。那么，如何反映运动员在某一时刻的瞬时速度呢？比如，如何求 $t=2$ 时的瞬时速度？你能设计一个求瞬时速度近似值的方法吗？（怎样才能更精确？）

【设计意图】让学生体验到平均速度只能粗略的刻画物体的运动状态，不能很好的反映物体在某一时刻的运动情况。这样可以进一步激起学生探究的欲望，为瞬时速度

的引入做铺垫。提出让学生设计一个求瞬时速度近似值的方法是为了启发学生寻求解决问题的思路。用平均速度近似值代替瞬时速度，为了提高精确度，学生容易想到不断缩短时间间隔。

活动预设：教师引导学生思考，学生发现不能直接求出 $t=2$ 时的瞬时速度，但可以考虑用 $t=2$ 附近一小段时间内的平均速度近似代替瞬时速度。学生用计算器计算，边计算边观察，容易得出随着时间间隔越来越小，用平均速率近似代替瞬时速率的误差越来越小（也就是精确程度越来越高）。教师再用课件展示事先准备好的表格（课本第四页表格略）。

问题6：结合自己的计算结果并观察表格，当 Δt 趋于0时，平均速度 $\bar{v}$ 有怎样的变化趋势？

【设计意图】学生通过自己的计算，已经直观感知到随着 Δt 越来越小，平均速度越来越逼近瞬时速度的基础上，用表格直观地展示了平均速度与瞬时速度的关系，让学生一目了然地得到结论。

活动预设：学生根据自己计算的体验和对表格的观察，发现：当 Δt 趋于0时，平均速度 $\bar{v}$ 趋于一个确定的值 -13.1。而当 Δt 趋于0时，平均速度 $\bar{v}$ 无限趋于 $t=2$ 时的瞬时速度。所以，$t=2$ 时的瞬时速度是 -13.1。所以当 $t=2$ 时的瞬时速度 v 可以认为是：Δt 趋于0时，平均速度 $\bar{v}$ 趋于确定的那个值 -13.1。因为 $\bar{v}=\frac{h(2+\Delta t)-h(2)}{\Delta t}$，所以为表述方便用 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{h(2+\Delta t)-h(2)}{\Delta t}=-13.1$ 表示。

所以，运动员在 t_0 时刻的瞬时速度 $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{h(t_0+\Delta t)-h(t_0)}{\Delta t}$

问题7：由上面的结论，把 $h=f(x)$ 看成是高度关于时间的函数，瞬时速度就是函数的瞬时变化率，你能表示函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率吗?

【设计意图】由特殊到一般，由具体到抽象得出函数瞬时变化率即导数的概念。

活动预设：学生和教师一起得出以下结论：

一般地，函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率是：定义在区间 (a,b) 上的函数 $f(x)$，$x_0\in(a,b)$，当 Δx 无限趋近于0时，$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 我们称它为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数，记作 $f'(x_0)$ 或 $y'|_{x=x_0}$，即 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

由导数的定义，我们知道高度 h 关于时间 x 的导数就是运动员的瞬时速度。其实，导数可以描述任何事物的瞬时变化率，如效率、国内生产总值的增长率等等。

（三）巩固提升"高大上"又"接地气"

例1：将原油精炼为汽油、柴油、塑胶等各种不同产品，需要对原油进行冷却和加热，如果在第 xh 时，原油的温度（℃）为 $y=f'(x)=x^2-7x+15\ (0\leqslant x\leqslant 8)$。计算第 $2h$ 与第 $6h$ 时原油温度的瞬时变化率，并说明它们的意义。

【设计意图】经历用定义计算导数的过程有助于掌握导数的算理和算法，能帮助学生理解导数的概念，让学生感受其中蕴含的逼近思想。应用计算结果解释瞬时变化率的意义，能让学生进一步体会导数的内涵，即导数反映了函数在某一点附件的变化快慢情况。

例2：我们知道自由落体运动的位移和时间的函数关系是：$s=\frac{1}{2}gt^2$。如何求自由落体运动的瞬时速度呢？

【设计意图】充分利用学生的认知基础，体验学习导数带来的好处。因为学生在高一物理课已经学习了瞬时速度，并且知道瞬时速度的公式是 $v=gt$，但不知道由来。我们用数学的方法得到自由落体运动的瞬时速度，让学生感受数学的神奇魅力和在各个领域应用之广泛。

活动预设：教师问学生自由落体运动的瞬时速度如何求，学生会回答 $v=gt$。如何得到的呢？激发了学生探求的欲望。

（4）课堂总结升华（此过程略）

二、本节课设计的特点

（一）设计理念和特色

本设计从生活现象的数学解释为角度切入，结合能反映导数思想和本质的两个生活实例，引导学生经历由平均变化率到瞬时变化率的过程，认识和理解导数概念。这个过程充分展现了一个完整的数学探究过程：提出问题、寻求解决方法、实施想法、发现规律、给出定义。这个过程淡化了导数的形式化定义和符号表示，让学生体会用已知探求未知，由特殊到一般，由具体到抽象的思想，提高了学生分析问题，解决问题的能力。

（二）特别说明

第一节需要4个课时，把变化率问题和导数的概念安排在一起的原因是：平均变化率和瞬时变化率是为导数的引入作铺垫的过渡性概念，由平均变化率到瞬时变化率再到导数，不仅符合学生的认知结构，且过度自然，思维连贯。所以，为了确保导数概念形成过程的完整体现和所蕴含的本质得到体现，需要将教材中的这两节课整合在一起讲授。另一个原因是后面的导数的几何意义比较难，涉及到切线的新定义，宜单独作为一节课。这也是为了把导数的概念和导数的几何意义两个难点分散到两节课来突破。

三、教学设计接地气要注意的问题

（一）引入要联系生活的实际，要结合现代社会发展的特点，举学生身边熟悉的例子，最好用生动活泼的语言引入。

（二）教学设计要在认知结构上贴近学生，强调不断地经历直观感知、观察发现、归纳类比、由特殊到一般、用已知探求未知等方法。

（三）强调在思维水平上贴近学生实际，在学生思维的最近发展区内，提出恰当的，对学生思维有适度启发的问题。

在强调接地气时还要防止过犹不及。新课程标准提出高中数学课程应注意提高学生的数学思维能力，这是数学教育的基本目标之一。新课程标准还提出数学课堂要"适度的形式化"。在数学教学中，学习形式化的表达是一项基本要求，但是不能只限于形式化的表达，要强调对数学本质的认识，否则会将生动活泼的数学思维活动淹没在形式化的海洋里。因此，数学课堂要把"接地气"作为一种实现教学目标的方法而不是目的，也就是在接地气的过程要遵循：熟悉、贴切、科学、有度这四个原则。我们还要摒弃教学设计的花哨，要追求教学设计和教学方法的得当、自然。该接地气的时候接地气，需要形式化的时候形式化。

参考文献：

[1]中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准[M].北京：人民教育出版社，2003.

[2]王芝平."变化率与导数"教学设计[J].数学通报，2013，(7).